DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

N.B. - La partie III n'utilise que les résultats de la partie I et n'intervient pas dans la partie IV.

NOTATIONS

1° Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif, E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, I_E l'élément de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\forall x \in E, \mathrm{I}_E(x) = x$ et $\mathscr{H}$ l'ensemble des homothéties de E c'est-à-dire $\mathscr{H} = \{\lambda.\mathrm{I}_E; \lambda \in \mathbb{K}\}$

2° Pour un endomorphisme u de E, on note :

- $u^0 = \mathrm{I}_E$ et $u^p = u \circ u^{p-1}$ pour tout entier p ; $p \geqslant 1$.
- $\mathscr{C}(u)$ (appelé commutant de u) la sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes v de E commutants avec u, c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.
- p_u le polynôme caractéristique de u.
- pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ défini par $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k X^k$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme de E défini par $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k u^k$ (on notera que $P(u)$ est un élément de $\mathscr{C}(u)$).
- pour tout vecteur x de E, $E_u(x)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par la famille de vecteurs $\{u^p(x); p \in \mathbb{N}\}$.
- un endomorphisme u de E est dit cyclique s'il existe un vecteur x de E tel que $E_u(x) = E$

3° Si $\mathscr{A}$ est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$, on note :

$$\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \{v \in \mathscr{L}(E) / v \circ u = u \circ v \ \ \forall u \in \mathscr{A}\}$$

Enfin pour une matrice A de l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, on note $\mathscr{C}(A) = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ AB = BA\}$ (appelé commutant de la matrice A).

Les candidats pourront admettre et utiliser les résultats suivants :

1. Soit $\mathscr{B}$ une base de E ; pour un endomorphisme u de E soit $M(u, \mathscr{B})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
   Alors, un endomorphisme v appartient au commutant de u si, et seulement si, $M(v, \mathscr{B})$ appartient au commutant de $M(u, \mathscr{B})$ et l'application $v \longmapsto M(v, \mathscr{B})$ est un isomorphisme entre ces deux algèbres.
2. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$; le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{noté} \quad V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

   est nul si et seulement s'il existe un couple (i, j) tel que : $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i \neq j$ et $\lambda_i = \lambda_j$.

PARTIE I

1° Soit x un vecteur de E et u un endomorphisme de E.

a. Montrer que $E_u(x)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E, contenant x et stable par u.

b. Soit $x \neq 0$; on pose $\dim_{\mathbb{K}} E_u(x) = k$. Montrer que $k \geq 1$ et que $\{u^i(x); 0 \leq i \leq k-1\}$ est une base de $E_u(x)$

c. Caractériser au moyen de la dimension de $E_u(x)$ les vecteurs propres de u

2° On suppose que u est un endomorphisme cyclique. Soit alors $x_0 \in E$ tel que $\{u^i(x_0); 0 \leq i \leq n-1\}$ soit une base de E.

a. Montrer que $\{u^i; 0 \leq i \leq n-1\}$ est une partie libre de $\mathscr{L}(E)$.

b. Soit v et w deux éléments de $\mathscr{C}(u)$. Montrer que $v = w$ si, et seulement si, $v(x_0) = w(x_0)$.

c. Montrer que $\{u^i; 0 \leq i \leq n-1\}$ est une base de $\mathscr{C}(u)$.

d. On pose $u^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$ où $a_k \in \mathbb{K}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

- Calculer le polynôme caractéristique p_u de u à l'aide des coefficients $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.
- En déduire que $p_u(u) = 0$.

3° Dans cette question u est un endomorphisme quelconque de E.

a. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u et soit v l'endomorphisme de F induit par u.
Montrer que p_v divise p_u. En déduire que $\ker p_v(u)$ est inclus dans $\ker p_u(u)$.

b. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer que u induit sur le sous-espace $E_u(x)$ un endomorphisme cyclique de $E_u(x)$. En déduire que $p_u(u)(x) = 0$.

c. Montrer que $p_u(u)$ est l'endomorphisme nul.

4° a. Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, \dim_{\mathbb{K}} E_u(x) \leq 1$. Montrer que u est une homothétie de E.

b. *Application* : Soit $\mathscr{A}$ une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$ satisfaisant la propriété :

$$\forall x \in E, x \neq 0, \exists f \in \mathscr{A} \exists \alpha \in \mathbb{K} \text{ tel que } \ker(f - \alpha \mathrm{I}_E) = \mathbb{K}x.$$

(où $\mathbb{K}x$ désigne la droite vectorielle engendrée par x).
Montrer que $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \mathscr{H}$

c. En déduire que $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \mathscr{H}$ dans les 2 cas suivants :

1. $\mathscr{A} = \mathbf{GL}(E)$ (ensemble des automorphismes de E). (On pourra éventuellement distinguer le cas où $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2).
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; E est un espace euclidien et $\mathscr{A}$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

PARTIE II

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u dans $\mathbb{K}$ et $r_1, r_2, ..., r_p$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

1° On suppose que $p = n$, c'est-à-dire que u a n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$. Montrer que u est cyclique.

1° Dans cette question, on suppose u diagonalisable.

a. Montrer que $v \in \mathscr{C}(u)$ si, et seulement si, v laisse stable les sous-espaces propres de u.

b. En déduire que $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u) = r_1^2 + r_2^2 + ... + r_p^2$.

c. Montrer que $(u - \lambda_1 \mathrm{I}_E) \circ (u - \lambda_2 \mathrm{I}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{I}_E) = 0$. En déduire que si $\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est une famille libre, u a n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes.

d. Déduire des résultats précédents que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. u est cyclique ;

ii. $\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est une famille libre ;

iii. u admet n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes ;

iv. $\dim_{\mathbb{K}}\mathscr{C}(u) = n$.

3° Dans cette question, on suppose u cyclique.

(a) Montrer, on utilisant une base convenable, que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{I}_E) \geq n-1$.

(b) En déduire que u est digonalisable si, et seulement si, u admet n valeurs propres dans $\mathbb{K}$ deux à deux distinctes.

4° *Application :* (cette question n'utilise que les résultats de la question 2°. b).
Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre k $(k \geq 2)$ $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ telles que :

$$\forall i = 1, 2, ..., k \qquad \forall j = 1, 2, ..., k \qquad \sum_{i=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}.$$

(on note $\alpha(A)$ la valeur commune des sommes ci-dessus.)
Soit J l'élément de $\mathscr{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

a. Montrer que $\mathscr{M}$ est le commutant de J et que α est une forme linéaire sur $\mathscr{M}$

b. Déterminer les ordres de multiplicité des valeurs propres de J. Donner $\dim_{\mathbb{R}}\mathscr{M}$.

c. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \in \mathscr{M}$, on pose $\beta(A) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$.
Montrer que $\mathscr{M}_0 = \{A \in \mathscr{M} / \alpha(A) = \beta(A)\}$ est un sous-espace vectoriel et calculer sa dimension.

PARTIE III

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice p $(p \geq 2)$ c'est-à-dire tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1° a. Montrer que pour tout vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, la famille de vecteurs $\{u^i(x); 0 \leq i \leq p-1\}$est une partie libre de E.

b. En déduire que p est inférieur ou égal à n et que u est cyclique si, et seulement si, $p = n$.

2° *Application* : pour tout entier $k \geqslant 0$ on désigne par $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k.
Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ défini (pour $k \geq 1$) par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_k[X] \;\; \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

a. Déterminer $\ker \Delta$. En déduire que $\mathrm{Im}\Delta = \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrer que Δ est cyclique.

b. Soit D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P'
Montrer que D est un élément de $\mathscr{C}(\Delta)$

c. La question (I.2°.c) permet de définir des réels $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$ tels que $D = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \Delta^i$ et ce de façon unique.
Déterminer ces réels lorsque $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

PARTIE IV

Dans toute cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\dim_{\mathbb{K}} E = 2$. On désignera par $\mathscr{P}$ un espace affine réel de dimension 2 associé à l'espace vectoriel E.

A. Soit u un endomorphisme de E satisfaisant :

$$u^p = \mathrm{I}_E \text{ avec } p > 2 \text{ et } u^q \neq \mathrm{I}_E \text{ pour } 1 \leq q \leq p-1$$

1° u peut-il être une homothétie ? Montrer que u est cyclique

2° a. Montrer que le reste de la division euclidienne du polynôme $X^p - 1$ par le polynôme caractéristique p_u de u est nul (on pourra utiliser les résultats de I.3.)

b. En déduire que les racines du polynôme p_u sont : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ où θ est un élément de l'ensemble $\{\dfrac{2k\pi}{p}; 1 \leq k \leq p-1; k \text{ et } p \text{premiers entre eux} \}$.

3° Soit e_1 un vecteur non nul de E et $e_2 = u(e_1)$

a. Montrer que (e_1, e_2) est une base de E et que la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix} \text{ (θ étant défini en 2.)}$$

b. Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique unique φ sur E satisfaisant :

$$\begin{cases} \varphi(e_1, e_1) = 1 \\ \varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y) \ \forall x \in E \ \forall y \in E \end{cases}$$

Donner la matrice de φ dans la base (e_1, e_2)

c. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Quelle est l'interprétation de u dans cette structure euclidienne ?

B. Soit f une application affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ satisfaisant la propriété suivante :
Il existe $(A_1, .., A_p) \in \mathscr{P}^p$, $(p > 2)$, avec $A_2, .., A_p$ distincts de A_1 tels que : $f(A_i) = A_{i+1}$ pour $i = 1..(p-1)$ et $f(A_p) = A_1$

1° a. Montrer que les points $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont 2 à 2 distincts.

b. Montrer que f a au moins un point fixe.

c. Montrer que $f^p = \mathrm{I}_{\mathscr{P}}$ (application identique sur $\mathscr{P}$) et que l'application linéaire associée à f, notée u, satisfait les conditions définies en tête de A.

d. Montrer que f a un point fixe unique G.

2° Montrer que les points $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ appartiennent à une ellipse de $\mathscr{P}$, de centre G et globalement invariante par f.

FIN DE L'ÉPREUVE

CORRIGÉ PAR : M.TARQI

PARTIE I

1. (a) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des sous-espaces de E contenant x et stables par u. $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant x et stable par u ; c'est le plus petit sous-espace de E contenant x et stable par u, d'autre part nous avons $E_u(x) \subset \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$, donc $E_u(x) = \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$.

   (b) Il suffit de montrer que la famille $\{x, u(x), ..., u^{k-1}(x)\}$ de $E_u(x)$ est libre . Soient $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ des scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i u^i(x) = 0$. Je dis que $\alpha_{k-1} = 0$, car sinon $u^{k-1}(x) \in \text{Vect}\{x, u(x), ..., u^{k-2}(x)\}$, et par récurrence on montre que $u^n(x) \in \text{Vect}\{x, u(x), ..., u^{k-1}(x)\}$ et donc $E_u(x) \subset \text{Vect}\{x, u(x), ..., u^{k-2}(x)\}$ et par conséquent $E_u(x)$ serait de dimension inférieure ou égale à $k-1$. Le même raisonnement montre que les $\alpha_i = 0$, pour $i = k-2, ..., 1, 0$, donc la famille $\{x, u(x), ..., u^{k-1}(x)\}$ est libre.

   (c) Si x est un vecteur propre de u, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ et donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$, ainsi $E_u(x) = \text{Vect}\{x\}$. Inversement si $E_u(x) = \text{Vect}\{x\}$, alors x et $u(x)$ sont liés et par consequent x serait un vecteur propre de u. Donc x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $\dim_{\mathbb{K}} E_u(x) = 1$.

2. (a) Soit $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ des scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i = 0$, donc $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0$, et comme la famille $\{x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0)\}$ est libre alors les α_i sont tous nuls. Donc $\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$

   (b) Puisque $\{x_0, u(x_0), ..., u^k(x_0)\}$ est une base de E, il suffit donc de montrer que
$$v(u^i(x_0)) = w(u^i(x_0)),$$
   pour tout $i = 0, 1, ..., n$.
   On a déjà $v(x_0) = w(x_0)$. Comme v et w commutent avec u, alors ils commutent avec tous les u^i, $i \in \mathbb{N}$. Donc
$$v(u^i(x_0)) = u^i(v(x_0)) = u^i(w(x_0)) = w(u^i(x_0)),$$
   et par conséquent $v = w$.
   Le sens inverse est clair.

   (c) Il est evIent que $\text{Vect}\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\} \subset \mathscr{C}(u)$. Soit $v \in \mathscr{C}(u)$, alors il existe des scolaires $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ tels que $v(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0))$. Pour conclure montrons que
$$v = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i.$$
   On a $v(x_0) = w(x_0)$ où $w = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i$, et d'après la question précédente $v = w$. Ainsi $\mathscr{C}(u) \subset \text{Vect}\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\}$ et par suite $\mathscr{C}(u) = \text{Vect}\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\} = \mathbb{K}[u]$.

   (d) Dans la base $\mathscr{B} = \{x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0)\}$ la matrice s'écrit sous la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrons par récurrence sur n que $p_u(X) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$.
Pour $n = 1$, c'est évIent. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$, montrons le au rang n.
En développant par rapport à la première ligne, on a

$$p_u(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -X & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} =$$

$$-X \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -X & & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} - X \end{vmatrix} - (-1)^n a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -X \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} p_u(X) &= (-1)^n X(X^{n-1} - a_{n-1}X^{n-2} - ... - a_1) + (-1)^{n+1} a_0 \\ &= (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_1 X - a_0). \end{aligned}$$

Remarque : Posons $v = u^n - a_0 \mathrm{I}_E - a_1 u - ... - a_{n-1}u^{n-1}$. On a $v(x_0) = 0$ et d'après la question $2.b$), $v = 0$, donc le polynôme $Q(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_1 X - a_0$ annule u. Si on admet le théorème de Cayly-Hamilton, alors comme $\deg Q = n$, $p_u(X) = (-1)^n Q(X)$.

3. (a) Soit $(e_1, e_2, ..., e_k)$ une base de F, complétons la à une base de E par des vecteurs $e_{k+1}, ..., e_n$. Puisque F est stable par u, alors la matrice de u dans cette s'écrit par bloc sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_u(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \det(A - \lambda I_k)\det(C - \lambda I_{n-k})$, donc $p_u(X) = p_v(X)Q(X)$ où Q est un polynôme . Donc p_v divise p_u.
Soit $x \in \ker p_v(u)$, alors $p_u(x) = p_v \circ Q(u)(x) = Q(u) \circ p_v(u)(x) = 0$, donc $x \in \ker p_u(u)$.

(b) ConsIérons le plus grand entier p pour lequel la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ soit libre. Un tel entier existe, car la famille (x) est libre (puisque $x \neq 0$) et que la famille $(x, u(x), ..., u^n(x))$ est liée (formée de $n+1$ vecteurs en dimension n). Posons $F = E_u(x) = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ dont $\mathscr{B} = (x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une base. Par définition de l'entier p , $u^p(x) \in E_u(x)$ car sinon la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ serait libre. On peut donc écrire $u^p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)$ avec $a_i \in \mathbb{K}$. Ce résultat permet aussi d'assurer que l'endomorphisme induit sur F est cyclique, et qu'il est stable par u et donc que p_v divise p_u . On peut alors écrire $p_u = Qp_v$ puis $p_u(u) = Q(u) \circ p_v(u)$. Il suffit maintenant d'établir $p_v(u)(x) = 0$, pour conclure $p_u(u)(x) = 0$. Le polynôme caractéristique de cette matrice compagnon est $p_v(X) = (-1)^p \left(X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i \right)$ et par suite $p_v(u)(x) = (-1)^p \left(u^p(x) - \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) \right) = 0$.

(c) La propriété est immédiate si $x = 0$, car $p_u(u)$ est une application linéaire, si $x = 0$ la question précédente montre que $p_u(u)(x) = 0$. En conclusion $p_u(u) = 0$.

4. (a) Soit u un endomorphisme de E. Pour tout vecteur x non nul, $u(x)$ et x sont colinéaires, car $\dim_{\mathbb{K}} E_u(x) = 1$.
Vérifions que u est homothétie, en effet, soient x et$y$ de E, alors il existe λ_x, λ_y et λ_{x+y} des scalaires tels que
$$u(x) = \lambda_x x, u(y) = \lambda_y y \text{ et } u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y).$$
Si x et y sont libres, la condition $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$ implique $\lambda_y = \lambda_x$, et si $y = \alpha x$, alors
$$u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_y y = \lambda_y \alpha x,$$
donc $\lambda_y = \lambda_x$. Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$, c'est-à-dire u est une homothétie.

(b) Il est clair que $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}(\lambda)$. Inversement, soit $u \in \mathscr{C}(\lambda)$, alors $f \circ u = u \circ f$ pour tout $f \in \mathscr{C}(\lambda)$. Soit x un vecteur non nul, alors il existe $f \in \lambda$ et $a \in \mathbb{K}$ tel que $\ker(f - a\mathrm{I}_E) = \mathbb{K}x$, donc $f(x) = ax$ et comme $f \circ u = u \circ f$, alors
$$u(ax) = f(u(x)) = au(x),$$
donc $u(x) \in \mathbb{K}x$, ainsi il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$ et par conséquent u est une homothétie. D'où l'égalité $\mathscr{H} = \mathscr{C}(\lambda)$.

(c) 1. Soit x un vecteur non nul et soient $e_2, e_3, ..., e_n$ des vecteurs de E tels que $(x, e_2, e_3, ..., e_n)$ soit une base de E.
Définissons $f \in \mathbf{GL}(E)$ par :
$$f(x) = \mu x, \mu \neq 0 \text{ et } \mu \neq 1 \text{ et } f(e_i) = e_i$$
pour $i = 2, 3, ..., n$. Il est clair que $\ker(f - \mu\mathrm{I}_E) = \mathbb{K}x$ et d'après ce qui précède $\mathscr{H} = \mathscr{C}(\lambda)$.

2. Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonomrmée de E. Soit f l'élément de $\mathscr{A}$ défini par :
$$f(e_1) = -e_1 \text{ et } f(e_i) = e_i \text{ pour } i = 2, 3, ..., n$$
On a $\ker(f + \mathrm{I}_E) = \mathbb{K}e_1$. Donc pour tout x de E non nul, il existe $f \in A$ tel que $\ker(f + \mathrm{I}_E) = \mathbb{K}x$. Donc $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \mathscr{H}$.

PARTIE II

1. Notons $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. La famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une base de E. Posons $y = x_1 + x_2 + ... + x_n$. Pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $u^k(y) = \lambda_1^k x_1 + \lambda_2^k x_2 + ... + \lambda_n^k x_n$. Supposons que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(y) = 0$. En exprimant cette relation en fonction des vecteurs de la famille libre $(x_1, x_2, ..., x_n)$, on parvient à $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = ... = p(\lambda_n) = 0$ avec $p = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$. Le polynôme p admet plus de racines que son degré donc $P = 0$ puis $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Ainsi la famille $(y, u(y), ..., u^{n-1}(y))$ est une base de E et finalement u est cyclique.

2. (a) Pour tout λ, valeur propre de u, on pose $E_\lambda = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$. Soit $v \in \mathscr{C}(u)$ et $x \in E_\lambda$, alors
$$uv(x) = vu(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$
donc $v(x) \in E_\lambda$.
Inversement puisque u est diagonalisable $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in E_\lambda$, on a $vu(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$ et $uv(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} uv(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i v(x_i)$ (car $v(x_i) \in E_{\lambda_i}$), donc $uv = vu$, ainsi $v \in \mathscr{C}(u)$

(b) Soit $v \in \mathscr{C}(u)$. u étant diagonalisabe, donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, notons u_i (resp. v_i) l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par u (resp. v). D'après ce qui précède $v \in \mathscr{C}(u)$ si, et seulement si, pour tout $i = 1, 2, ..., p$, $v_i \in \mathscr{C}(u_i)$.

Soit φ l'application de $\mathscr{C}(u)$ dans $\prod_{i=1}^{p} \mathscr{C}(u_i)$ définie par :

$$\varphi(v) = (v_1, v_2, ..., v_p)$$

On vérifie facilement que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, donc

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u) = \sum_{i=1}^{p} \dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u_i)$$

et comme $u_i = \lambda_i \mathrm{I}_{E_{\lambda_i}}$, alors tout $v \in \mathscr{L}(E_i)$ commute avec u_i et donc

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u_i) = \dim_{\mathbb{K}} \mathscr{L}(E_i) = r_i^2,$$

ainsi

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u) = \sum_{i=1}^{p} \dim_{\mathbb{K}} \mathscr{L}(E_i) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2.$$

(c) Posons $g = g_1 \circ g_2 \circ ... \circ g_p$ avec $g_i = (u - \lambda_i \mathrm{I}_E)$. On a $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$. Puisque u est digaonalisable, alors il suffit de montrer que pour tout vecteur propre de g, $g(x) = 0$. Soit x un vecteur propre de u, alors il existe λ_i tel que $g_i(x) = u(x) - \lambda_i x = 0$ et donc $g(x) = 0$. Si $\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est libre le polynôme minimal serait de degré n, or π_u divise le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, car Q annule u, alors $n \leq p$ et donc $p = n$.

(d) i)$\Longrightarrow$ ii) Si u est cyclique, alors $\{\mathrm{I}_E, u, ..., u^{n-1}\}$ est libre d'après la question 2 de la première partie.

ii)$\Longrightarrow$ iii) Si la condition ii) est vérifié, alors d'après la question 2. c) de cette partie u admet n valeurs propres distinctes.

iii)$\Longrightarrow$iv) la condition iii) montre que $r_i = \dim_{\mathbb{K}} E_{\lambda_i} = 1$ pour tout i et donc $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u) = n$, d'après la question 2.b) de cette partie.

iv)$\Longrightarrow$iii) D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\left(\sum_{i=1}^{p} 1 \times r_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{p} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} r_i^2\right).$$

Comme u est diagonalisable, on a $\sum_{i=1}^{p} r_i = n$ et la condition $\dim_{\mathbb{K}} \mathscr{C}(u) = n$ montre que $n \geq \dfrac{n^2}{p}$ donc $p \geq n$, ainsi $p = n$ et par conséquent u admet n valeurs propres distinctes.

iii)$\Longrightarrow$ i) C'est une conséquence de la question 1.

3. (a) L'endomorphisme u étant cyclique donc il existe x_0 un vecteur non nul tel que $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E, dans cette base la matrice de u s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

donc

$$A-\lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

d'où $\mathrm{rg}(u-\lambda \mathrm{I}_E)$ est au moins égale à $n-1$, pour cela il suffit de remarquer que la sous matrice d'ordre $n-1$, à savoir

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (le bloc sous la diagonale).

(b) Si u est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ et $n = \sum_{i=1}^{p} r_i$. La condition $\mathrm{rg}(u-\lambda_i \mathrm{I}_{E_{\lambda_i}}) \geq n-1$ implique $\dim_{\mathbb{K}} E_{\lambda_i} \leq 1$, donc $r_i = \dim_{\mathbb{K}} E_{\lambda_i} = 1$, donc nécessaireement $p = n$ et par suite u admet n valeurs propres deux à deux distinctes.
Inversement, si l'endomorphisme u admet n valeurs propres, alors il est diagonalisable.

4. APPLICATION :

(a) Soient $A = (a_{ij})_{(1\leq i,j\leq k)}$ et $B = (b_{ij})_{(1\leq i,j\leq k)}$ de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k} b_{ij}$$

pour tout couple (i,j), alors

$$\sum_{i=1}^{k}(a_{ij}+\lambda b_{ij}) = \sum_{j=1}^{k}(a_{ij}+\lambda b_{ij})$$

ceci montre que $\mathscr{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ et que l'application α est une forme linéaire.

D'autre part, soit $A = (a_{ij})_{(1\leq i,j\leq k)} \in \mathscr{C}(J)$, alors l'égalité $AJ = JA$ entraîne $\sum_{i=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}$, donc $A \in \mathscr{M}$.
Réciproque est immédiat.

(b) clair que Il est $\mathrm{rg}\, J = 1$, donc $\dim_{\mathbb{R}} \ker J = k-1$, ainsi 0 est une valeur propre de J et $\dim_{\mathbb{R}} E_0 = k-1$. D'autre part, si $x = {}^t(1,1,...,1)$, alors $Jx = kx$, donc k est une valeur de J et comme $\dim_{\mathbb{R}} E_0 = k-1$, alors $\dim_{\mathbb{R}} \ker(J-kI_k) = 1$. En conclusion J est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(J) = \{0,k\}$, 0 est d'ordre de multiplicité $k-1$ et k est d'ordre de multiplicité 1.

Remarque : J est une matrice symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 2. b) de cette partie,

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{M} = \dim_{\mathbb{R}} \mathscr{C}(u) = (k-1)^2 + 1^2 = (k-1)^2 + 1.$$

(c) Il est clair que β est une forme linéaire sur $\mathscr{M}$ et que $\mathscr{M}_0 = \ker(\alpha - \beta)$, donc $\mathscr{M}_0$ est un hyperplan de $\mathscr{M}$, donc il est de dimension $(k-1)^2 + 1 - 1 = (k-1)^2$.

PARTIE III

1. (a) Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0,$$

on applique u^{p-1} à cette inégalité, on obtient $\alpha_0 u^{p-1}(x) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$, puis on applique une autre fois u^{p-2}, on obtient $\alpha_1 = 0$, de proche en proche on montre que $\alpha_2 = ... = \alpha_{p-1} = 0$.
Donc la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre.

(b) $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E, qui est de dimension n, donc $p \leq n$. Si u est cyclique, alors il existe $x_0 \in E$ non nul tel que $(x_0, u(x), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E, on en déduit qu'il n'existe pas de polynôme P non nul de degré strictement inférieure à n et tel que $P(u)x_0 = 0$. Mais on sait que p_u annule u, donc le polynôme minimal $\pi_u = (-1)^n p_A$, et donc $\deg \pi_u = n$, ici $\pi_u = X^p$, donc $p = n$. Réciproquement, si $n = p$ il est clair que u est cyclique.

2. APPLICATION :

(a) Il est clair que Δ est une application linéaire de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}_k[X]$.

(b) Soit $P \in \ker \Delta$, donc $P(X+1) = P(X)$, donc le polynôme $P(X) - P(0)$ admet un infinité de racines, d'où il est nul, ainsi P est polynôme constant. Inversement tout polynôme constant est dans $\ker \Delta$. Donc $\ker \Delta$ est l'ensemble des polynômes constants, donc $\dim_{\mathbb{R}} \ker \Delta = 1$.
D'après le théorème du rang, $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(\Delta) = n - 1$ et comme $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$, alors $\mathrm{Im}\Delta = \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
D'autre part, la famille $(P_i)_{0 \leq i \leq k}$ définie par :

$$P_0 = 1 \text{ et } P_i(X) = \frac{X(X-1)...(X-i+1)}{i!},$$

pour $1 \leq i \leq k$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et on vérifie facilement que $\Delta(P_0) = 0$ et si $i \geq 1$ $\Delta(P_i) = P_{i-1}$, donc $(P_k, P_{k-1}, ..., P_1, P_0) = (P_k, \Delta(P_k), \Delta^2(P_k), ..., \Delta^k(P_k))$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$, donc Δ est cyclique.

(c) Il est évIent que $\Delta D = D\Delta$, donc $D \in \mathscr{C}(\Delta)$, et comme Δ est cyclique, alors $\mathscr{C}(\Delta) = \mathrm{Vect}\{I, \Delta, \Delta^2, ..., \Delta^k\}$.

(d)
- $k = 1$. $D = \Delta$ $(\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1)$
- $k = 2$. $D = \Delta - \dfrac{1}{2}\Delta^2 \left(\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dfrac{-1}{2}\right)$
- $k = 3$. $D = \Delta - \dfrac{1}{2}\Delta^2 + \dfrac{1}{3}\Delta^3$, $\left(\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dfrac{-1}{2}, \alpha_3 = \dfrac{1}{3}\right)$.

PARTIE IV

A.

1. Si f est une homothétie de rapport λ, de $f^p = \mathrm{I}_E$ on déduit que $\lambda^p = 1$ et donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
   - $\lambda \neq 1$: car $f \neq \mathrm{I}_E$
   - $\lambda \neq -1$: sinon on aurait $f^2 = \mathrm{I}_E$ ce qui est impossible par hypothèse car $1 \leq 2 \leq k$.

   f n'étant pas une homothétie, d'après la question 4.a) de la première partie il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, f(x))$ est libre donc base de E ($\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2$). On conclut alors que f est endomorphisme cyclique.

2. (a) Le polynôme minimal, π_f, de f coincide avec le polynôme caractéristique p_f, en effet : π_f est de degré 1 ou 2 et divise p_f. f n'étant pas une homothétie donc $\deg(\pi_f) \neq 1$ par suite $\pi_f = p_f$. $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de f donc $\pi_f = p_f$ le divise.

   (b) L'endomorphisme f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car $X^p - 1$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples. f n'étant pas une homothétie , p_f admet deux racines distinctes. p_f est à coefficients réels donc les deux racines sont toutes réelles ou complexes conjuguées. Elles sont de module 1 car elles sont racines du polynôme annulateur $X^k - 1$.
   Si les deux racines sont réelles distinctes, alors elles sont 1 et -1 . La matrice de f dans une base de vecteurs propres est $D^2 = I$ donc $u^2 = \mathrm{I}_E$ et ceci est absurde. Ainsi les racines de p_u, qui sont des racines $X^p - 1$ sont donc $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, donc $\theta = \frac{2k\pi}{p}$ avec $1 \leq k \leq p-1$.
   Supposons que qu'il existe $1 \leq q \leq p-1$ tel que $p = qk$, alors dans ces conditions $e^{iq\theta} = e^{-iq\theta} = 1$ et donc $u^q = \mathrm{I}_E$, et ceci est absurde. Ainsi k et p sont premiers entre eux.

3. (a) Puisque u n'admet pas de valeurs propres réelles, alors pour tout $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est une base de E.
   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(e_2) = ae_1 + bu(e_1)$. La matrice de u dans cette base est
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$
   Mais $b = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(u) = 2\cos\theta$ et $a = -\det(A) = -\det(u) = -1$, donc
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

   (b) L'UNICITÉ : Si φ existe alors $\varphi(e_1, e_1) = 1$ et $\varphi(e_1, e_2) = \varphi(u(e_1), u(e_2)) = \varphi(e_2, ae_1 + be_2)$ donc par bilinéarité de φ on obtient $(1-a)\varphi(e_1, e_2) = b$ et donc $\varphi(e_1, e_2) = \cos\theta$, ce qui prouve l'unicité de φ .
   L'EXISTENCE : Soit φ la forme bilinéaire de matrice dans la base (e_1, e_2).

   - $\varphi(e_1, e_1) = 1$ et
   $$\begin{aligned} \varphi(u(e_1), u(e_1)) &= \varphi(e_2, -e_1 + 2\cos\theta e_2) \\ &= -\varphi(e_2, e_1) + 2\cos\theta\varphi(e_2, e_2) \\ &= -\cos\theta + 2\cos\theta = \cos\theta \end{aligned}$$
   - $\varphi(e_1, e_2) = \cos\theta$ et
   $$\begin{aligned} \varphi(u(e_1), u(e_2)) &= \varphi(e_2, -e_1 + 2\cos\theta e_2) \\ &= -\varphi(e_2, e_1) + 2\cos\theta\varphi(e_2, e_2) \\ &= -\cos\theta + 2\cos\theta = \cos\theta. \end{aligned}$$

- $\varphi(e_2, e_2) = 1$ et

$$\begin{aligned}\varphi(u(e_2), u(e_2)) &= \varphi(-e_1 + 2\cos\theta e_2, -e_1 + 2\cos\theta e_2)\\ &= \varphi(e_1, e_1) - 2\cos\theta\varphi(e_1, e_2) - 2\cos\theta\varphi(e_2, e_1) + 4\cos^2\theta\phi(e_2, e_2)\\ &= 1 - 4\cos^2\theta + 4\cos^2\theta = 1.\end{aligned}$$

On a donc, $\varphi(f(x_1), f(e_1)) = \varphi(e_1, e_1), \varphi(u(e_2), u(e_2)) = \varphi(e_2, e_2)$ et $\varphi(u(e_1), u(e_2)) = \varphi(e_1, e_2)$ donc par linéarité de u et bilinéarité de φ on obtient :

$$\varphi(u(X), u(Y)) = \varphi(X, Y), (X, Y) \in E \times E$$

Ainsi la forme bilinéaire φ de matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2) est l'unique forme vérifiant les conditions données.

(c) $\mathrm{Tr}(B) = 2 > 0$ et $\det(B) = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta > 0$, donc les valeurs propres de A sont strictement positives et par conséquent A est définie positive ce qui entraîne que φ définit un produit scalaire sur E. u est un endomorphisme φ-orthogonal puisqu'il conserve le produit scalaire, et comme $\det(u) = 1$, u est une rotation vectorielle.

B.

1. (a) Supposons qu'il existe un couple (i, j) tel que $2 \leq i < j \leq p$ et $A_i = A_j$. Posons $p = j + k$, donc $A_i = A_{p-k}$ entraine $f(A_i) = f(A_{p-k})$ et donc $A_{i+1} = A_{p-k+1}$ et après un certain nombre d'opérations on obtient $A_{i+k+1} = A_1$ et ceci est absurde.

(b) Soit G le barycentre des points $A_1, A_2, ..., A_p$, alors

$$u\left(\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{GA_i}\right) = \overrightarrow{0} \text{ (u étant l'application linéaire associée à f)}$$

et

$$\sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^{p-1} \overrightarrow{f(G)A_{i+1}} + \overrightarrow{f(G)A_1} = \overrightarrow{0}$$

et comme G est unique, alors $f(G) = G$. Ainsi f admet au moins un point fixe.

(c) Soit M un point quelqconque de P. Puisque $(\overrightarrow{GA_1}, \overrightarrow{GA_2})$ est une base de E (car $\overrightarrow{GA_2} = u(\overrightarrow{GA_1})$, alors il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{GM} = \alpha\overrightarrow{GA_1} + \beta\overrightarrow{GA_2},$$

donc

$$u^p(\overrightarrow{GM}) = \overrightarrow{Gf^p(M)} = \alpha u^p(\overrightarrow{GA_1}) + \beta u^p(\overrightarrow{GA_2}) = \alpha\overrightarrow{f^p(G)f^p(A_1)} + \beta\overrightarrow{f^p(G)f^p(A_2)} = \overrightarrow{GM},$$

donc $f^p = \mathrm{I}_{\mathscr{P}}$ et $u^p = \mathrm{I}_E$.
Pour chaque $1 \leq q \leq p - 1$

$$u^q(\overrightarrow{GA_1}) = \overrightarrow{f^q(G)f^q(A_1)} = \overrightarrow{GA_{q+1}} \neq \overrightarrow{GA_1},$$

donc $u^q \neq \mathrm{I}_E$.

(d) Soit $M \in \mathscr{P}$ tel que $f(M) = M$, donc $u(\overrightarrow{GM}) = \overrightarrow{GM}$ ou encore $(u - \mathrm{I}_E)(\overrightarrow{GM}) = 0$. Mais la matrice de $u - \mathrm{I}_E$ dans la base (e_1, e_2) étant $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2\cos\theta - 1 \end{pmatrix}$, donc elle est inversible et par suite $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$, donc $M = G$, donc on a montré que f admet un seul point fixe, qui est le point G.

2. Notons $\|X\| = \varphi(X, X)$ la norme de vecteurs X associée au produit scalaire φ et soit $d = \|\overrightarrow{GA_1}\|^2$. D'après la question 3. de la partie A, pour tout $i = 2, 3, ..., p$,

$$\|\overrightarrow{GA_i}\|^2 = \|\varphi(GA_i)\|^2 = \varphi(\overrightarrow{f(G)f(A_i)})\|^2 = \|\overrightarrow{GA_{i-1}}\|^2 = ... = \|\overrightarrow{GA_1}\|_2 = d^2,$$

donc les points $(A_i)_{(1 \leq i \leq p)}$ appartiennent à l'éllipse $\mathscr{E}$ de $\mathscr{P}$, d'équation $\|GM\|^2 = d^2$, c'est-à-dire d'équation $x^2 + y^2 + 2(\cos\theta)xy - d^2 = 0$ (cette équation est écrite dans le repère $(G, \overrightarrow{GA_1}, \overrightarrow{GA_2})$).
D'autre part, $\|\overrightarrow{Gf(M)}\| = \|\overrightarrow{f(G)f(M)}\| = \|u(\overrightarrow{GM})\| = \|\overrightarrow{GM}\|$, donc l'éllipse $\mathscr{E}$ est globalement invariante par f.

•••••••••••••